Дәріс 11

Лопиталь ережесі.

Теорема $f(x)$ пен $g(x)$ $x=a$ нүктесінің маңайында (a – нүктесі алынып тасталуы да мүмкін) анықталған, дифференциалданатын және $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (немесе $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$), a – нүктесінің маңайында $g(x)\neq 0,$ $g'(x)\neq 0,$ шарттары орындалатын функциялар болсын. Онда егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегі де бар және

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

теңдігі орындалады.

Егер $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ өрнегі де $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық болып $f'(x),$ $g'(x)$ функциялары теорема шартын қанағаттандырса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$0\cdot\infty,$ $0^{0},$ $\infty^{0},$ $\infty-\infty,$ 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\dfrac{0}{0}$ немесе $\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығына келтіріледі.

а) $0\cdot\infty$ анықталмағандығын

$\left(f(x)\cdot g(x),\ \mathrm{f(x)} \to 0, \mathrm{g(x)} \to \infty, \mathrm{x} \to a \right)$ $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ түрлендіруі $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, ал

$f(x)\cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ түрлендіруі $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ түріне әкеледі.

б) 1^{∞}, 0^0, ∞^0 $\left(f(x)^{g(x)}\right)$ анықталмағандықтарын түрлендірулер арқылы $0\cdot\infty$ түріне a - жағдайына келтіруге болады.

в) $\infty-\infty$ $(f(x)-g(x),\ \ \mathrm{f} \to +\infty,\ \ \mathrm{g} \to +\infty\ \ (x \to a))$ анықталмағандығын $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріне келтіруге болады.

Туындылардың көмегімен функцияларды зерттеу. Функциялардың локальді экстремумі

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің белгілі бір δ - маңайында:

$$f(x) \le f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{1}$$

$$(\text{сәйкес}\quad f(x) \ge f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)). \tag{2}$$

теңсіздіктері орындалса, онда x_0-ді $f(x)$ функциясының локальді максимум (локальді минимум) нүктесі деп атайды.

Егер (1) және (2) шарттарды

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),\ \ f(x) - f(x_0) < 0, \tag{1'}$$

$$(\text{сәйкес } \forall x \in (x_0 - \delta,\ \ x_0 + \delta),\ \ f(x) - f(x_0) > 0), \tag{2'}$$

шарттарымен ауыстырсақ, онда x_0 – **локальді қатаң максимум** (сәйкес, **локальді қатаң минимум) нүктесі** деп аталады.

Анықтама. *Егер* x_0 *нүктесінде* $f(x)$ *функиясы үзіліссіз және* $f'(x_0) = 0$ *немесе* $f'(x_0)$ *туындысы болмайтын болса, онда* x_0 *нүктесі* $f(x)$ *функциясының* ***кризистік*** *немесе* ***күдікті нүктесі*** *деп аталады.*

Теорема-1 (экстремумның жеткілікті шарты). $y = f(x)$ функциясы $[x_0 - \delta,\ \ x_0 + \delta]$ кесіндісінде үзіліссіз және $(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ мен $(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ аралықтарда дифференциалданатын болсын.

Егер $(x_0 - \delta, \quad x_0)$ мен $(x_0, \quad x_0 + \delta)$ аралықтарында $f'(x)$ туындысының таңбалары қарама–қарсы болса, онда x_0 экстремум нүктесі. Атап айтқанда:

а) егер $\forall x \in (x_0 - \delta, \quad x_0), \quad f'(x) > 0$ ал $\forall x \in (x_0, \quad x_0 + \delta), \quad f'(x) < 0$ болса, онда x_0 –локальді максимум;

б) егер $x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad f'(x) < 0,$ ал $x \in (x_0, x_0 + \delta), \quad f'(x) > 0$ болса, онда x_0 – локальді минимум нүктесі;

в) $(x_0 - \delta, \quad x_0)$ және $(x_0, \quad x_0 + \delta)$ аралықтарында $f'(x)$ таңбасы бірдей болса, онда x_0 – нүктесінде локальді экстремум жоқ.

Теорема-2. $f(x)$ фунциясының x_0 нүктесінде **екінші туындысы бар** және $f'(x_0) = 0$ болсын. Онда

1) егер $f'(x_0) > 0$ болса, онда x_0 –локальді минимум;

2) егер $f'(x_0) < 0$ болса, онда x_0–локальді максимум;

3) егер $f'(x_0) = 0$ болса, онда x_0–нүктесі экстремум нүктесі болуы да болмауы да мүмкін.